Può la descrizione quantomeccanica della realtà fisica essere considerata completa?†

In una teoria completa c'è un elemento corrispondente a ogni elemento di realtà. Una condizione sufficiente per la realtà di una quantità fisica è la possibilità di prevederne il valore con certezza, senza disturbare il sistema. In meccanica quantistica nel caso di due quantità fisiche descritte da operatori non commutanti, la conoscenza di una preclude la conoscenza dell'altra. Allora o (1) la descrizione della realtà data dalla funzione d'onda in meccanica quantistica non è completa oppure (2) queste due quantità non possono avere realtà simultanea. Prendere in considerazione il problema di fare previsioni riguardanti un sistema sulla base di misurazioni effettuate su un altro sistema che abbia interagito in precedenza con esso porta al risultato che se (1) è falsa allora anche (2) è falsa. Si è pertanto portati a concludere che la descrizione della realtà come data dalla funzione d'onda non è completa.

1.

Ogni seria considerazione di una teoria fisica deve tener conto della distinzione tra la realtà oggettiva, che è indipendente da ogni teoria, e i concetti fisici con i quali la teoria opera. Si intende che questi concetti corrispondono alla realtà oggettiva, e per mezzo di questi concetti noi ci costruiamo una descrizione della realtà.

Nel tentativo di giudicare il successo di una teoria fisica, dobbiamo porci due domande: (1) "La teoria è corretta?" e (2) "La descrizione fornita dalla teoria è completa?". È solo nel caso in cui si possano dare risposte positive a entrambe queste domande, che i concetti della teoria si possono dire soddisfacenti. La correttezza della teoria è giudicata dal grado di accordo tra le conclusioni della teoria e l'esperienza umana. Questa esperienza, che da sola ci rende in grado di operare inferenze circa la realtà, in fisica assume la forma di esperimento e misurazione. Noi qui

† di A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, Istituto di Studi Avanzati, Princeton, New Jersey. Testo ricevuto dalla rivista il 25 Marzo 1935 e pubblicato su Physical Review **47** (1935) 777-780.

desideriamo prendere in considerazione la seconda domanda, in quanto applicata alla meccanica quantistica.

Qualunque sia il significato attribuito al termine *completo*, la seguente richiesta perché una teoria sia completa sembra essere una richiesta necessaria: *ogni elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica.* Noi chiameremo questa la condizione di completezza. La seconda domanda ottiene quindi facilmente risposta, non appena siamo in grado di decidere quali sono gli elementi della realtà fisica.

Gli elementi della realtà fisica non possono essere determinati da considerazioni filosofiche *a priori*, ma si devono trovare facendo riferimento ai risultati di esperimenti e misurazioni. Una definizione pregnante di realtà è, comunque, non necessaria per il nostro scopo. Ci riterremo soddisfatti del seguente criterio, che consideriamo ragionevole. *Se, senza disturbare in nessun modo un sistema, possiamo prevedere con certezza (cioè con probabilità unitaria) il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a questa quantità fisica.* Ci sembra che questo criterio, sebbene lungi dall'esaurire tutti i modi possibili per riconoscere una realtà fisica, ci fornisca almeno un modo, quando le condizioni poste in esso criterio si verifichino. Considerato non come condizione necessaria di realtà, ma soltanto come condizione sufficiente, questo criterio è in accordo con le idee di realtà sia della meccanica classica che della meccanica quantistica.

Allo scopo di illustrare le idee coinvolte prendiamo in considerazione la descrizione quantomeccanica del comportamento di una particella dotata di un solo grado di libertà. Il concetto fondamentale della teoria è il concetto di *stato*, che si suppone completamente caratterizzato dalla funzione d'onda ψ, che è una funzione delle variabili scelte per descrivere il comportamento della particella. In corrispondenza a ciascuna quantità fisicamente osservabile A c'è un operatore, che può essere indicato dalla medesima lettera.

Se ψ è un'autofunzione dell'operatore A, cioè se

$$\psi' \equiv A\psi = a\psi, \tag{1}$$

dove a è un numero, allora la quantità fisica A ha con certezza il valore a quando la particella si trova nello stato dato da ψ. In accordo con il nostro criterio di realtà, per una particella nello stato dato da ψ per cui valga l'Eq. (1), c'è un elemento di realtà fisica corrispondente alla quantità fisica A. Sia, per esempio,

$$\psi = e^{(2\pi i/h)p_0 x}, \tag{2}$$

dove h è la costante di Planck, p_0 è una costante numerica e x la variabile indipendente. Poiché l'operatore corrispondente all'impulso della particella è

$$p = (h/2\pi i)\partial/\partial x, \tag{3}$$

otteniamo

$$\psi' = p\psi = (h/2\pi i)\partial\psi/\partial x = p_0\psi. \tag{4}$$

Pertanto, nello stato dato dall'Eq. (2), l'impulso ha certamente il valore p_0. Ha quindi significato dire che l'impulso della particella nello stato dato dall'Eq. (2) è reale.

D'altra parte se l'Eq. (1) non valesse, non potremmo più dire che la quantità fisica A possiede un valore particolare. Questo è il caso, per esempio, della coordinata della particella. L'operatore ad essa corrispondente, diciamo q, è l'operatore di moltiplicazione per la variabile indipendente. Quindi,

$$q\psi = x\psi \neq a\psi. \tag{5}$$

In accordo con la meccanica quantistica possiamo solamente dire che la probabilità relativa che una misurazione della coordinata fornisca un risultato compreso tra a e b è

$$P(a,b) = \int_a^b \bar{\psi}\psi dx = \int_a^b dx = b - a. \tag{6}$$

Siccome questa probabilità è indipendente da a, ma dipende solo dalla differenza $b - a$, vediamo che tutti i valori della coordinata sono equiprobabili.

Un valore definito della coordinata, per una particella nello stato dato dall'Eq. (2), è pertanto impredicibile, ma può essere ottenuto solamente da una misurazione diretta. Tale misurazione comunque disturba la particella e quindi altera il suo stato. Dopo la determinazione della coordinata la particella non si troverà più nello stato dato dall'Eq. (2). La conclusione che di solito da ciò si trae in meccanica quantistica è che *quando l'impulso di una particella è noto, la sua coordinata non possiede realtà fisica.*

Più in generale, si mostra in meccanica quantistica che, se gli operatori che corrispondono a due quantità fisiche, diciamo A e B, non commutano, cioè se $AB \neq BA$, allora la conoscenza precisa di una di esse preclude tale conoscenza dell'altra. Di più, ogni tentativo di determinare l'una sperimentalmente altererà lo stato del sistema in modo tale da distruggere la conoscenza dell'altra.

Da questo segue che o (1) *la descrizione quantomeccanica della realtà data dalla funzione d'onda non è completa* oppure (2) *quando gli operatori che corrispondono a due quantità fisiche non commutano le due quantità non possono avere realtà simultanea.* Perché se entrambe avessero realtà simultanea - e quindi valori definiti - questi valori entrerebbero nella descrizione completa, in accordo con la condizione di completezza. Se quindi la funzione d'onda fornisse tale descrizione completa della realtà, dovrebbe contenere questi valori; questi sarebbero allora predicibili. Poiché la situazione non è questa, non ci rimangono che le alternative formulate.

In meccanica quantistica solitamente si assume che la funzione d'onda *contenga* una descrizione completa della realtà fisica del sistema nello stato cui essa corrisponde. A prima vista questa assunzione è assolutamente ragionevole, perché l'informazione che si può ottenere da una funzione d'onda sembra corrispondere esattamente a ciò che può essere misurato senza alterare lo stato del sistema. Noi mostreremo, comunque, che questa assunzione, insieme al criterio di realtà dato sopra, porta a una contraddizione.

2.

A questo scopo supponiamo di avere due sistemi, I e II, cui permettiamo di interagire da $t = 0$ a $t = T$, e che dopo tale tempo non ci sia più alcuna interazione tra le due parti. Supponiamo inoltre che gli stati dei due sistemi prima di $t = 0$ fossero noti. Allora possiamo calcolare con l'aiuto dell'equazione di Schödinger lo stato del sistema composto I+II ad ogni tempo successivo; in particolare, per ogni $t > T$. Indichiamo la corrispondente funzione d'onda con Ψ. Non possiamo, comunque, calcolare lo stato in cui ciascuno dei due sistemi si trova dopo l'interazione. Questo, in accordo con la meccanica quantistica, può essere fatto solo con l'aiuto di ulteriori misurazioni, mediante un processo noto come *riduzione del pacchetto d'onda.* Prendiamo in considerazione gli elementi essenziali di questo processo.

Siano a_1, a_2, a_3, $\cdots$ gli autovalori di una quantità fisica A relativa al sistema I e $u_1(x_1)$, $u_2(x_1)$, $u_3(x_1)$, $\cdots$ le corrispondenti autofunzioni, dove x_1 rappresenta le variabili usate per descrivere il primo sistema. Allora Ψ, considerata come funzione di x_1, può essere espressa come

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \tag{7}$$

dove x_2 rappresenta le variabili usate per descrivere il secondo sistema. Qui $\psi_n(x_2)$ devono essere meramente considerate come i coefficienti dell'espansione di Ψ in una serie di funzioni ortogonali $u_n(x_1)$. Supponiamo ora che la quantità A venga misurata e che si trovi che ha il valore a_k. Allora si conclude che dopo la misurazione il primo sistema si trova nello stato dato dalla funzione d'onda $u_k(x_1)$, e che il secondo sistema si trova nello stato dato dalla funzione d'onda $\psi_k(x_2)$. Questo è il processo di riduzione del pacchetto d'onda; il pacchetto d'onda dato dalla serie infinita (7) è ridotto a un singolo termine $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$.

L'insieme di funzioni $u_n(x_1)$ è determinato dalla scelta della quantità fisica A. Se, invece di questa, avessimo scelto un'altra quantità, diciamo B, con autovalori b_1, b_2, b_3, $\cdots$ e autofunzioni $v_1(x_1)$, $v_2(x_1)$, $v_3(x_1)$, $\cdots$ avremmo ottenuto, invece dell'Eq. (7), l'espansione

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \phi_s(x_2) v_s(x_1), \tag{8}$$

dove ϕ_s's sono i nuovi coefficienti. Se ora si misura la quantità B e si trova che ha il valore b_r, concludiamo che dopo la misurazione il primo sistema si trova nello stato dato da $v_r(x_1)$ e il secondo sistema nello stato dato da $\phi_r(x_2)$.

Vediamo pertanto che, come conseguenza di due misurazioni differenti operate sul primo sistema, il secondo sistema può trovarsi in stati descritti da due differenti funzioni d'onda. D'altra parte, poiché al momento della misurazione i due sistemi non interagiscono più, nessun cambiamento reale può aver luogo nel secondo sistema come conseguenza di qualunque cosa possa essere fatta al primo sistema. Questo è, naturalmente, la pura definizione di ciò che si intende con l'assenza di un'interazione tra i due sistemi. Dunque, *è possibile assegnare due funzioni d'onda differenti* (nel nostro esempio ψ_k e ϕ_r) *alla medesima realtà* (il secondo sistema dopo l'interazione con il primo).

Ora, può succedere che le due funzioni d'onda, ψ_k e ϕ_r, siano autofunzioni di due operatori non commutanti corrispondenti a quantità fisiche P e Q, rispettivamente. Che questo possa essere effettivamente il caso può essere visto meglio con un esempio. Supponiamo che i due sistemi siano due particelle, e che

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp, \tag{9}$$

dove x_0 è una costante. Sia A l'impulso della prima particella; allora, come abbiamo visto nell'Eq. (4), le sue autofunzioni saranno

$$u_p(x_1) = e^{(2\pi i/h)px_1} \tag{10}$$

corrispondenti all'autovalore p. Siccome qui abbiamo a che fare con il caso di uno spettro continuo, ora l'Eq. (7) sarà

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp, \tag{11}$$

dove

$$\psi_p(x_2) = e^{-(2\pi i/h)(x_2 - x_0)p}. \tag{12}$$

Questa ψ_p comunque è l'autofunzione dell'operatore

$$P = (h/2\pi i)\partial/\partial x_2, \tag{13}$$

corrispondente all'autovalore $-p$ dell'impulso della seconda particella. D'altra parte, se B è la coordinata della prima particella, essa ha come autofunzioni

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x), \tag{14}$$

corrispondenti all'autovalore x, dove $\delta(x_1 - x)$ è la ben nota delta di Dirac. L'Eq. (8) in questo caso diventa

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(x_2) v_x(x_1) dx, \tag{15}$$

dove

$$\phi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x - x_2 + x_0)p} dp = h\delta(x - x_2 + x_0). \tag{16}$$

Questa ϕ_x, comunque, è l'autofunzione dell'operatore

$$Q = x_2$$

corrispondente all'autovalore $x + x_0$ della coordinata della seconda particella. Poiché

$$PQ - QP = h/2\pi i, \tag{18}$$

abbiamo mostrato che in generale è possibile per ψ_k e ϕ_r essere autofunzioni di due operatori non commutanti, corrispondenti a quantità fisiche.

Ritornando ora al caso generale contemplato in Eq. (7) e (8), assumiamo che ψ_k e ϕ_r siano in realtà autofunzioni di operatori non commutanti P e Q, corrispondenti agli autovalori p_k e q_r, rispettivamente. Pertanto, misurando A o B siamo in grado di prevedere con certezza, e senza disturbare in alcun modo il secondo sistema, o il valore della quantità P (cioè p_k) o il valore della quantità Q (cioè q_r). In accordo con il nostro criterio di realtà, nel primo caso dobbiamo considerare la quantità P come elemento di realtà, nel secondo caso è la quantità Q ad essere un elemento di realtà. Ma, come abbiamo visto, entrambe le funzioni d'onda ψ_k e ϕ_r appartengono alla stessa realtà.

In precedenza abbiamo dimostrato che o (1) la descrizione quantomeccanica della realtà data dalla funzione d'onda non è completa oppure (2) quando gli operatori corrispondenti a due quantità fisiche non commutano le due quantità non possono avere realtà simultanea. Partendo quindi dall'assunzione che la funzione d'onda fornisca veramente una descrizione completa della realtà fisica, siamo arrivati alla conclusione che due quantità fisiche, con operatori non commutanti, possono avere realtà simultanea.

Pertanto la negazione di (1) conduce alla negazione della sola altra alternativa (2). Siamo quindi forzati a concludere che la descrizione quantomeccanica della realtà fisica data dalle funzioni d'onda non è completa.

Si potrebbe obbiettare a questa conclusione sulla base del fatto che il nostro criterio di realtà non è sufficientemente restrittivo. In realtà, non si arriverebbe alla nostra conclusione se si insistesse sul fatto che due o più quantità fisiche possono essere riguardate come elementi simultanei di realtà *solo quando possono essere misurati o previsti simultaneamente*. Da questo punto di vista, poiché o l'una o l'altra, ma non entrambe simultaneamente, delle quantità P e Q possono essere previste, esse non sono simultaneamente reali. Questo fa sì che la realtà di P e Q dipenda dal processo di misurazione effettuato sul primo sistema, che non disturba il secondo sistema in alcun modo. Non ci si può aspettare nessuna definizione ragionevole di realtà che permetta questo.

Mentre dunque abbiamo mostrato che la funzione d'onda non fornisce una descrizione completa della realtà fisica, lasciamo aperta la questione se tale descrizione esista o no. Noi crediamo, comunque, che una tale teoria sia possibile.